Лекция 4

§4. Редове на Фурие – поточкова сходимост

1. Теорема на Дирихле. Тук ще разглеждаме 2π-периодична функция $f(x)$, която ще искаме да бъде ***гладка по части***. Това означава, че интервала $(-\pi,\pi)$ може да се раздели на отделни части с помощта на точките $-\pi=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=\pi$ така, че във всеки интервал (a_{k-1},a_k), $k=1,2,\ldots,n$, функцията $f(x)$ е непрекъсната и има непрекъсната производна, като в краищата на интервала (a_{k-1},a_k), $k=1,2,\ldots,n$, се предполага наличието на двете едностранни граници

$$\lim_{x\to a_{k-1}+0}=f(a_{k-1}+0),\ \lim_{x\to a_k-0}=f(a_k-0)$$

и освен това наличието на двете едностранни производни

$$f'_+(a_{k-1})=\lim_{t\to+0}\frac{f(a_{k-1}+t)-f(a_{k-1}+0)}{t},\ f'_-(a_k)=\lim_{t\to-0}\frac{f(a_k+t)-f(a_k-0)}{t}.$$

От направеното предположение в частност се получава, че във всеки ограничен интервал функцията $f(x)$ е или непрекъсната или има евентуално само ***краен брой прекъсвания от първи род*** и следователно във всяка точка $x_0\in\mathbb{R}$ съществуват двете едностранни граници $\lim\limits_{x\to x_0+0}=f(x_0+0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0}=f(x_0-0)$. Освен това във всяка точка $x_0\in\mathbb{R}$ съществуват и двете едностранни производни

$$f'_+(x_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},\ f'_-(x_0)=\lim_{t\to-0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0-0)}{t}.$$

Определеният по този начин клас функции покрива нуждите на елементарните приложения на редовете на Фурие.

Такива функции се конструират например по следната схема.

1) Определяне на гладка по части функция $f(x)$ в някой ***основен интервал*** с дължина 2π от вида $[a,a+2\pi)$ или $(a,a+2\pi]$.

2) 2π-периодично продължение на функцията над останалата част от числовата ос.

Основният интервал се избира обикновено $[-\pi,\pi)$ или $[0,2\pi)$.

Сходимостта на фуриеровия ред в дадена точка x_0 предявява определени изисквания към поведението на $f(x)$ в тази точка. По нататък ще използваме по много съществен начин резултата от следното твърдение.

Твърдение 4.1. Нека функцията $f(x)$ е 2π-периодична и гладка по части. Тогава за всяко $x_0\in\mathbb{R}$, функцията

$$\varphi(t)=\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)}{t}$$

притежава дясна граница в нулата, т.е. съществува границата на $\varphi(t)$ при $t\to0$ със стойности $t>0$.

Доказателство. Съгласно формулата на Тейлър имаме $(t>0)$

$$f(x_0+t)=f(x_0+0)+tf'_+(x_0)+to(t),\ f(x_0-t)=f(x_0-0)-tf'_-(x_0)+to(t),$$

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)}{t}=$$

$$=\frac{f(x_0+0)+tf'_+(x_0)+f(x_0-0)-tf'_-(x_0)+to(t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)}{t}=$$

$$=[f'_+(x_0)-f'_-(x_0)]+o(t)$$

от което следва, че във всяка точка $x_0 \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$\lim_{t\to+0}\varphi(t)=f'_+(x_0)-f'_-(x_0). \ \blacksquare$$

За да изследваме сходимостта на реда на Фурие в отделни точки, преди всичко трябва да познаваме в детайли структурата на неговите частични суми

$$\tau_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt\right)\cos kx+\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt\right)\sin kx\right].$$

Въз основа на линейното свойство на интеграла, последното се преобразува във вида

$$\tau_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]f(t)dt,$$

понеже $\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx=\cos k(t-x)$. По индукция може да се докаже верността на тъждеството

$$D_n(u)=\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\cdots+\cos nu=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}},\ n=0,1,2,\ldots,$$

следователно за частичните суми намираме представянето

$$(4.1)\qquad \tau_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-t)f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{(t-x)}{2}}f(t)dt.$$

Тук $D_n(u)$ се нарича ***ядро на Дирихле***. След смяна на променливата $t-x=\theta$, (4.1) приема вида

$$(4.2)\qquad \tau_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}f(x+\theta)d\theta.$$

Твърдение 4.2. Нека $g(t)$ е ω-периодична интегруема функция. Тогава за всяко число a е изпълнено равенството

$$\int_{a}^{a+\omega}g(t)dt=\int_{0}^{\omega}g(t)dt.$$

Доказателство. От адитивното свойство на интеграла имаме

$$(4.3)\qquad \int_{a}^{a+\omega}g(t)dt=\int_{a}^{\omega}g(t)dt+\int_{\omega}^{a+\omega}g(t)dt.$$

Сега във втория интеграл от дясната страна извършваме смяна на променливата $t-\omega=\theta$, след което за този интеграл получаваме

$$\int_{\omega}^{a+\omega}g(t)dt=\int_{0}^{a}g(\theta+\omega)d\theta,$$

откъдето отчитайки ω-периодичността на $g(t)$, $g(\theta+\omega)=g(\theta)$, намираме

$$\int_{\omega}^{a+\omega}g(t)dt=\int_{0}^{a}g(\theta+\omega)d\theta=\int_{0}^{a}g(\theta)d\theta=\int_{0}^{a}g(t)dt.$$

Сега отново от адитивността на интеграла следва верността на (4.3)

$$\int_a^{a+\omega} g(t)dt = \int_a^{\omega} g(t)dt + \int_0^{a} g(t)dt = \int_0^{\omega} g(t)dt \ . \ \blacksquare$$

Подинтегралната функция в (4.2)

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} f(x+\theta)$$

е 2π-периодична по θ, откъдето въз основа на твърдение 4.2, за частичните суми получаваме формулата

$$\tau_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} f(x+t)dt \ .$$

Последният интеграл записваме като сбор

$$\tau_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} f(x+t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} f(x+t)dt \ .$$

В първия интеграл от дясната страна сменяме променливата $t \to -t$, след което отчитайки нечетността на функцията синус, получаваме

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} f(x+t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} f(x-t)dt \ ,$$

следователно частичните суми могат да се запишат във вида

(4.4) $$\tau_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \left[f(x+t) + f(x-t)\right]dt \ .$$

По нататък се нуждаем от

Теорема 4.1 (*Риман-Лебег*). Нека $g(t)$ е интегруема в интервала $[a,b]$. Тогава

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)\cos\lambda x dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)\sin\lambda x dx = 0 \ .$$

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$. По условие $g(x)$ е интегруема, следователно може да се намери някакво интегрално разделяне $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ на интервала $[a,b]$, за което разликата между горната и долната сума на Дарбу не надвишава $\frac{\varepsilon}{2}$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2},$$

където

$$M_k = \sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} g(x),\ m_k = \inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} g(x),\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ ,\ k = 1,2,\ldots,n \ .$$

Ще докажем само съотношението

(4.5) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^b g(x)\sin\lambda x dx=0$,

понеже другото се доказва по същия начин. От основните свойства на интеграла намираме последователно

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos\lambda x dx\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-m_k]\sin\lambda x dx+\sum_{k=1}^{n} m_k\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\sin\lambda x dx\right|,$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-m_k]\sin\lambda x dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{\lambda}[\cos\lambda x_{k-1}-\cos\lambda x_k]\right|,$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right|\le\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-m_k||\sin\lambda x|dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{\lambda}|\cos\lambda x_{k-1}-\cos\lambda x_k|,$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right|\le\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}(M_k-m_k)dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{2m_k}{\lambda}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{2m_k}{\lambda},$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2nC}{\lambda},\ C=\sup_{a\le x\le b}|f(x)|.$$

Избираме едно λ_0 достатъчно голямо, че $\dfrac{2nC}{\lambda}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогава при всяко $\lambda>\lambda_0$ е в сила

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2nC}{\lambda_0}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

което по определение означава верността на съотношението (4.5). ■

С елементарни модификации на горното доказателство може да се установи, че ***теоремата на Риман-Лебег е валидна и в случая, когато интегралът е несобствен в безкрайни граници и абсолютно сходящ.***

Подинтегралната функция в (4.4) има особеност в нулата, понеже знаменателят клони към нула, когато $t\to 0$. С цел да изолираме тази особеност да изберем едно $\delta>0$ $(\delta<\pi)$ и да запишем интеграла като сбор

$$\tau_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}[f(x+t)+f(x-t)]dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}[f(x+t)+f(x-t)]dt.$$

Вторият интеграл в горната сума може да се запише във вида

(4.6) $$\frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t dt.$$

Първият множител тук представлява непрекъсната функция на променливата t в интервала $[\delta,\pi]$, а поради наличието на втория множител $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$, от теорема 4.1 следва, че интегралът (4.6) клони към нула за $n\to\infty$. Оказа се, че границата на частичните суми $\tau_n(x)$ при $n\to\infty$, ако съществува, е същата като границата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]dt.$$

Този интеграл в граници от 0 до δ съдържа множителя $\left[f(x+t)+f(x-t)\right]$, който отчита поведението на функцията $f(x)$ само в околността $[x-\delta, x+\delta]$, при което $\delta>0$ може да бъде фиксирано произволно малко. По този начин доказахме

Теорема 4.2 (*принцип за локализацията*). Сходимостта на реда на Фурие в дадена точка x зависи само от поведението на функцията в околност на тази точка. ■

В следващото твърдение се предполага, че разглежданата функция е регулярна, което практически означава, че е налице условието от твърдение 4.1.

Твърдение 4.3. Нека функцията $f(x)$ е 2π-периодична и гладка по части. Тогава за всяко $x_0\in\mathbb{R}$ и всяко $\delta>0$ $(\delta\le\pi)$ интегралът

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)\right]dt \tag{4.7}$$

клони към нула при $n\to\infty$.

Доказателство. Интегралът (4.7) записваме във вида

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left[\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)}{t}\right]\left[\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \tag{4.8}$$

Тук първият множител

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)}{t},$$

съгласно твърдение 4.1, представлява ***интегруема*** функция в интервала $[0,\delta]$. Същото важи и за втория множител, понеже

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\right]=1.$$

По този начин функцията

$$\left[\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)}{t}\right]\left[\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\right]$$

се оказа интегруема в интервала $[0,\delta]$. Сега верността на твърдението се получава след прилагане на теорема 4.1. ■

Ако в израза (4.4) положим $f(x)\equiv 1$, ще получим равенството

$$1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}2dt,$$

което след умножаване с $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ приема вида

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]dt,$$

следователно е в сила равенството

$$\tau_n(x_0)-\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}=$$

(4.9)
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)\right]dt.$$

Сега сме готови да докажем следната основна теорема за поточкова сходимост на редовете на Фурие.

Теорема 4.3 (*Дирихле*). Нека функцията $f(x)$ е 2π-периодична и гладка по части. Тогава за всяко $x_0\in\mathbb{R}$ е изпълнено

$$\tau(x_0)=\lim_{n\to\infty}\tau_n(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

т.е. стойността на реда на Фурие в точката x_0 е равна на полусбора от лявата и дясната граници на функцията в тази точка.

Доказателство. Доказателството на тази теорема следва веднага от представянето (4.9) и твърдение 4.3. ■

В частност ако $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, то е изпълнено $\tau(x_0)=f(x_0)$.

Да разгледаме отново примера (10.19) за 2π-периодичната функцията $f(x)$, зададена като $f(x)=x$ при $-\pi\le x<\pi$, за която пресметнахме

$$\tau(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Тук функцията $f(x)$ е гладка по части, при което има прекъсване от първи род само в точките $x=(2k+1)\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, за които $f((2k+1)\pi+0)+f((2k+1)\pi-0)=0$. В този случай съгласно теоремата на Дирихле имаме $\tau(x)=x$ при $-\pi<x<\pi$ и $\tau(\pi)=\tau(-\pi)=0$. Останалите стойности на $\tau(x)$ се повтарят периодично с период 2π.

За примера (10.20) с 2π-периодичната функцията $f(x)$, зададена като $f(x)=x^2$ при $-\pi\le x<\pi$, намерихме следния ред на Фурие

$$\tau(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Тук функцията $f(x)$ е гладка по части и навсякъде непрекъсната. В този случай съгласно теоремата на Дирихле имаме $\tau(x)=x^2$ при $-\pi\le x\le\pi$. Останалите стойности на $\tau(x)$ се повтарят периодично с период 2π.

Да разгледаме още следния пример. Нека $f(x)$ е 2π-периодичната функция, определена като $f(x)=-1$ при $-\pi\le x<0$ и $f(x)=1$ при $0\le x<\pi$. Следвайки формулите за коефициентите, пресмятаме

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0\,,\ n = 0,1,2,\dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi),\ n = 1,2,\dots,$$

следователно

$$b_{2n} = 0 \text{ и } b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)},\ n = 0,1,2,\dots.$$

За реда на Фурие намираме

$$f(x) \sim \tau(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Функцията $f(x)$ е гладка по части, при което има прекъсване от първи род само в точките $x = k\pi$, $k = 0,\pm1,\pm2,\dots$, за които $f(k\pi+0)+f(k\pi-0)=0$. На следващата рисунка е дадена графиката на $f(x)$ заедно с графиката на частичните суми при $n = 21$.

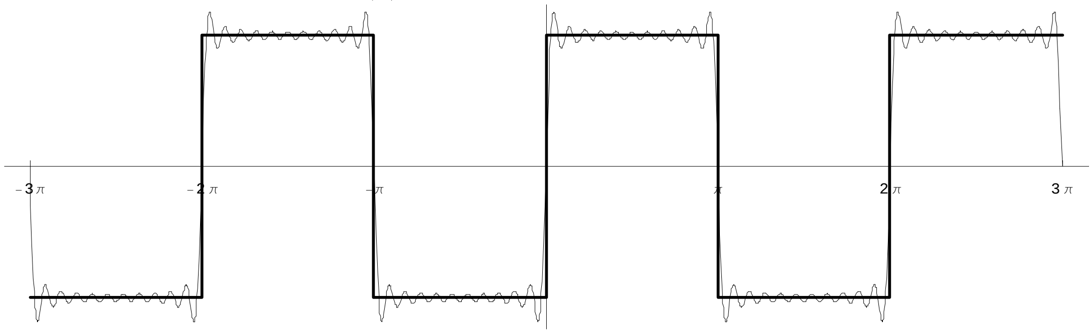

Рис. 4.1.

В този случай съгласно теоремата на Дирихле имаме $\tau(x) = f(x)$ при $x \neq k\pi$, $k = 0,\pm1,\pm2,\dots$ и $\tau(k\pi) = 0$. Ако в представянето на функцията $f(x)$ положим $x = \frac{\pi}{2}$, ще получим интересното равенство

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + (-1)^n\frac{1}{2n+1} + \dots.$$

На рис. 4.1 се вижда ***явлението на Гибс***, което се състои в особеното поведение на реда на Фурие в околност на точките на прекъсване за функцията $f(x)$.

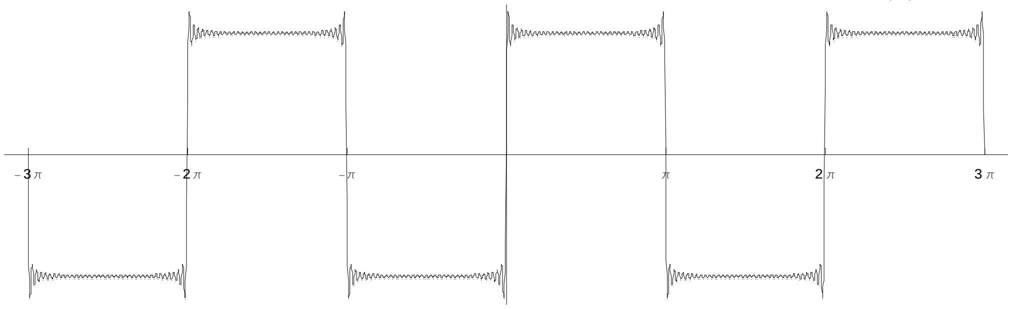

Рис. 4.2.

На рис 4.2 е показана графиката на частичните суми при $n = 71$.

2. Редове на Фурие за $2l$-периодични функции. Сега ще разглеждаме функции $f(x)$ с период $T = 2l$, $l > 0$. При $l = \pi$ се получава вече познатия случай на 2π-периодични функции. В този случай функциите

(4.10) $\quad c_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2l}},\ c_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{l}}\cos\dfrac{k\pi x}{l},\ s_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{l}}\sin\dfrac{k\pi x}{l},\ k = 1,2,\dots,$

образуват ортонормирана система за интервала $[-l,l]$. Редът на Фурие тук има вида

(4.11) $$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

където коефициентите се пресмятат по формулите

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ ,\ n=0,1,2,\dots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ ,\ n=1,2,\dots.$$

Когато функцията $f(x)$ е ***четна*** всичките коефициенти b_n са равни на нула, а редът на Фурие приема вида

(4.12) $$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\ ,\ a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ ,\ n=0,1,2,\dots.$$

При ***нечетна*** функция $f(x)$, всичките коефициенти a_n са равни на нула, а редът на Фурие приема вида

(4.13) $$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\ ,\ b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ ,\ n=1,2,\dots.$$

В тези случаи формулата (4.12) се нарича ***развитие по косинуси***, а формулата (4.13) се нарича ***развитие по синуси***.

Верността на (4.12) и (4.13) се получава веднага от следното твърдение, чиято вярност се получава непосредствено.

Твърдение 4.4. Ако $g(x)$ е четна функция, то за всяко $l>0$ е изпълнено

$$\int_{-l}^{l}g(x)dx=2\int_{0}^{l}g(x)dx\ .$$

Ако $g(x)$ е нечетна, то

$$\int_{-l}^{l}g(x)dx=0\ .\ \blacksquare$$

Теоремата на Дирихле за поточковата сходимост на реда на Фурие остава в сила и за редовете (4.12-13).

Всичките развития в ред на Фурие досега се отнасяха за интервала $[-l,l]$, който е симетричен спрямо нулата. Всъщност системата от функции (4.10) образува ортонормиран базис и за всеки интервал $[a,a+2l]$. По този начин всеки интервал от вида $[a,a+2l)$ може да бъде предварително избран за основен, при което функцията $f(x)$ се задава конкретно над основния интервал, а останалите стойности се определят еднозначно от изискването за $2l$-периодичност. Друг често използван основен интервал освен $[-l,l)$ е интервалът $[0,2l)$, който за 2π-периодичните функции е интервалът $[0,2\pi)$. Вида на реда на Фурие, както и формулите за пресмятане на коефициентите остават същите.

3. Диференциране на редовете на Фурие. Тук ще разглеждаме непрекъсната и гладка по части 2π-периодична функция $f(x)$. Най-елементарен е случаят, когато $f(x)$ има непрекъсната производна навсякъде. В общия случай производната съществува навсякъде с изключение евентуално на някои точки, които са краен брой във всеки ограничен интервал, а във всяка такава точка съществуват двете едностранни производни. В последния случай производната отново ще означаваме $f'(x)$, при което така определената "обобщена" производна представлява непрекъсната по части функция. Тук от особено значение е фактът, че остава в сила формулата за интегриране по части

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)dg(x),$$

за всяка непрекъснато диференцируема функция $g(x)$. Верността на последната формула може да се проследи чрез елементарни разсъждения.

Нека $f(x)$ е непрекъсната и гладка по части 2π-периодична функция с ред на Фурие

(4.14) $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right].$$

Тогава нейната производна $f'(x)$ представлява интегруема функция, която по определение има ред на Фурие

(4.15) $$f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n' \cos nx + b_n' \sin nx\right].$$

За коефициентите на реда имаме

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx df(x) = \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\cos nx,$$

$$a_n' = \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = nb_n,\ n = 1,2,\dots,$$

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx df(x) = \frac{1}{\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\sin nx,$$

$$b_n' = -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = -na_n,\ n = 1,2,\dots.$$

Следователно

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n n\cos nx - a_n n\sin nx\right],$$

което означава, че редът на Фурие (4.15) за производната $f'(x)$ се е получил от ***почленно диференциране*** на реда на Фурие за функцията $f(x)$. По този начин доказахме

Теорема 4.4. Нека $f(x)$ е непрекъсната и гладка по части 2π-периодична функция. Тогава реда на Фурие за производната $f'(x)$ се получава посредством почленно диференциране реда на Фурие на функцията $f(x)$. ■

Например за 2π-периодичната функцията $f(x)$, зададена като $f(x) = x^2$ при $-\pi \le x < \pi$, имаме

(4.16) $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ x \in (-\pi, \pi).$$

След почленно диференциране получаваме вече известното развитие

$$2x = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \ x \in (-\pi, \pi).$$

4. Интегриране на редовете на Фурие. Нека $f(x)$ е 2π-периодична функция, която предполагаме непрекъсната или имаща евентуално с краен брой прекъсвания от първи род в интервала $[-\pi, \pi]$. Да разгледаме нейния ред на Фурие

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt].$$

След почленно интегриране, последното приема вида

$$\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^x \cos ntdt + b_n \int_0^x \sin ntdt \right],$$

което дава основание на напишем следното (формално засега) равенство

$$(4.17) \quad \int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{\sin nx}{n} + b_n \frac{1 - \cos nx}{n} \right].$$

Теорема 4.5. Нека $f(x)$ удовлетворява горното условие. Тогава редът на Фурие за $f(x)$ може да се интегрира почленно, при което е вярна формулата (4.17).

Доказателство. Да разгледаме функцията

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2}.$$

Непосредствено се проверява, че $\Phi(x)$ представлява непрекъсната и гладка по части 2π-периодична функция. Нейната периодичност се вижда от равенството

$$\Phi(x + 2\pi) - \Phi(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)dt - a_0\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - a_0\pi = 0,$$

в което се използва твърдение 4.2. За производната на $\Phi(x)$ имаме

$$\Phi'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2},$$

във всяка точка x, където $f(x)$ е непрекъсната. Да образуваме реда на Фурие за $\Phi(x)$,

$$(4.18) \quad \Phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx].$$

За коефициентите пресмятаме

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cos nxdx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) d \sin nx = \frac{1}{n\pi} \Phi(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxd\Phi(x),$$

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxd\Phi(x) = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi'(x) \sin nxdx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \sin nxdx,$$

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin nxdx = -\frac{b_n}{n}, \ n = 1, 2, \ldots.$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \sin nxdx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) d \cos nx = -\frac{1}{n\pi} \Phi(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxd\Phi(x),$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxd\Phi(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi'(x) \cos nxdx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \cos nxdx,$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nxdx = \frac{a_n}{n},\ n = 1,2,\dots .$$

Следователно (4.18) има вида

(4.19) $\Phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right].$

За да пресметнем A_0, във формулата (4.18) полагаме $x = 0$, след което получаваме

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

което след заместване в (4.19) дава формулата (4.17). ■

Например от (4.16) имаме

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt,\ x \in (-\pi,\pi),$$

което след интегриране от 0 до x, $|x| < \pi$, получаваме

$$\int_0^x t^2 dt = \int_0^x \frac{\pi^2}{3}dt + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\int_0^x \cos ntdt,$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx,\ x \in (-\pi,\pi),$$

откъдето намираме следния ред на Фурие

$$\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx,\ x \in (-\pi,\pi).$$

5. Комплексна форма на запис на редовете на Фурие. В този раздел ще разглеждаме комплекснозначни функции на реален аргумент $f(x) + ig(x)$, където i е имагинерната единица, $i = \sqrt{-1}$. Диференцирането и интегрирането на такива функции се извършва почленно,

$$[f(x) + ig(x)]' = f'(x) + ig'(x) \text{ и } \int_a^b [f(x) + ig(x)]dx = \int_a^b f'(x)dx + i\int_a^b g'(x)dx.$$

Да припомним формулата на Ойлер

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ \alpha \in \mathrm{R}.$$

За да получим реда на Фурие в комплексна форма, разглеждаме следните базисни функции

$$\mathbf{e}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\cos nx + i\sin nx],\ n = 0,\pm1,\pm2,\dots,$$

при което

$$\bar{\mathbf{e}}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\cos nx - i\sin nx] = \mathbf{e}_{-n}(x),\ n = 0,\pm1,\pm2,\dots .$$

Те изпълняват условията за ортонормираност

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{e}_m(x)\bar{\mathbf{e}}_n(x)dx = 0 \text{ при } m \neq n,\ \int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{e}_m(x)\bar{\mathbf{e}}_m(x)dx = 1.$$

Нека $f(x)$ е 2π-периодична функция. Редът на Фурие в този случай има вида

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\mathbf{e}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

където коефициентите се получават по формулите

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\mathbf{e}}_n(x)dx,\; n = 0, \pm1, \pm2, \dots .$$

Горните формули могат да се модифицират по следния по-прегледен начин

(4.20) $$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

където

(4.21) $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\; n = 0, \pm1, \pm2, \dots .$$

Съпоставяйки (4.21) с познатите формули за реда на Фурие

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right],$$

където

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\; n = 1, 2, \dots,$$

намираме следните съотношения

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\; c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),\; c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),\; n = 1, 2, \dots,$$

откъдето получаваме

$$a_0 = c_0 + c_0 = 2c_0,\; a_n = c_n + c_{-n},\; b_n = i(c_n - c_{-n}),\; n = 1, 2, \dots .$$

Последното показва, че (4.20-21) представлява алтернативна форма на запис на реда на Фурие, която форма в много случаи се явява по-удобна.

Нека сега $f(x)$ е $2l$-периодична функция. Тук базисните функции имат вида

$$\mathbf{e}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}}e^{\frac{n\pi ix}{l}} = \frac{1}{\sqrt{2l}}\left[\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}\right],\; n = 0, \pm1, \pm2, \dots,$$

при което

$$\overline{\mathbf{e}}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}}e^{-\frac{n\pi ix}{l}} = \frac{1}{\sqrt{2l}}\left[\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}\right],\; n = 0, \pm1, \pm2, \dots .$$

Те също изпълняват условията за ортонормираност

$$\int_{-l}^{l} \mathbf{e}_m(x)\overline{\mathbf{e}}_n(x)dx = 0 \text{ при } m \neq n,\; \int_{-l}^{l} \mathbf{e}_m(x)\overline{\mathbf{e}}_m(x)dx = 1.$$

Редът на Фурие в този случай се записва

(4.22) $$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi ix}{l}},$$

където коефициентите се получават по формулите

(4.23) $$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{n\pi ix}{l}}dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx - i\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\frac{n\pi x}{l}dx,\; n = 0, \pm1, \pm2, \dots .$$