Лекция 5

§5. Диференциални уравнения от първи ред

1. Основни определения. ***Диференциално уравнение*** се нарича уравнение, в което участват известен брой производни на търсената функция. В общия случай диференциалното уравнение има вида $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)=0$, където F е непрекъсната функция. Най-високата производна в записа се нарича ред на уравнението, например уравнението $y''' \sin y + x^2 \cos y' - 2xy'' = 0$ е от трети ред. Променливата x се нарича ***независима променлива***, а чрез y е означена функцията която търсим в качеството на решение на въпросното уравнение. Една непрекъсната функция $y(x)$ се нарича решение на диференциалното уравнение в интервала Δ, когато има непрекъснати производни до реда на уравнението и след заместване го удовлетворява тъждествено в интервала Δ. Ние ще разглеждаме основно уравнения разрешени относно старшата производна, които имат вида $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, където f е непрекъсната функция. Под ***общо решение*** на дадено диференциално уравнение се разбира съвкупността от всичките негови решения. Намирането на общото решение на дадено диференциално уравнение е специфична и трудна задача, а в повечето случаи общото решение не може да се запише като краен израз от елементарни функции дори когато самото уравнение изглежда достатъчно просто. Едно такова уравнение например е уравнението $y' = y^2 - x^2$.

Намирането на неопределен интеграл от функцията $f(x)$ формално е частен случай на решаване на диференциално уравнение от първи ред $y' = f(x)$. Неговото общо решение е $y = \int f(x)dx + C$, в който запис присъства една произволна константа. Уравнението от n-ти ред $y^{(n)} = f(x)$ се решава чрез последователни интегрирания. Например да решим уравнението $y'' = \cos x$. След едно интегриране получаваме $y' = \sin x + C_1$, а след второто $y = -\cos x + C_1 x + C_2$. Тук се получиха две произволни константи колкото е редът на уравнението. В общия случай ситуацията е аналогична. Общото решение на едно диференциално уравнение от ред n зависи от толкова наброй произволни константи и има вида $\Phi\left(x, y; C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0$. При фиксирани допустими стойности за тези константи, формулата за общо решение задава връзка между променливите x и y, която в типичния случай представлява (една или повече) крива в декартовата равнина R^2_{xy}. Тези криви се наричат ***интегрални криви*** на уравнението.

За уравнението $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ ще разглеждаме още и ***начална задача***, която се получава ако към това уравнение прибавим определен брой начални условия, които представляват стойностите на търсената функция и нейните производни до ред $n-1$ в дадена начална точка x_0.

В тази лекция основно ще разглеждаме уравнения от първи ред решени относно производната, които се записват $y' = f(x, y)$, където $f(x, y)$ е непрекъсната функция. Общото решение тук има вида $\Phi(x, y; C) = 0$. Съвкупността на интегралните криви се определя от един параметър – произволната константа C, а решаването на началната задача с начално условие $y(x_0) = y_0$ означава да се избере онази интегрална крива, която минава през точката на началните данни (x_0, y_0). За тези уравнения променливите x и y са фактически равнопоставени по смисъла на самото уравнение, независимо от факта, че първоначално x се схваща като независима променлива, а y като функция на x. Тази равнопоставеност добре се забелязва от вида на общото решение, както и от геометричното тълкуване на решенията като интегрални криви. Ако запишем производната като отношение на двата диференциала, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнението $y' = f(x,y)$ приема вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \text{ или } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} = g(x,y),$$

което още веднъж показва еднаквото значение на променливите x и y. Последното обосновава равенството

(5.1) $\quad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$,

като най-обща форма на записване на едно диференциално уравнение от първи ред, решено относно производната. Уравнението (5.1) можем да презапишем

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \text{ или } x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

където x' означава производната на x като функция на y.

2. Уравнения с разделящи се променливи. Такива са уравненията от вида

$$y' = f(x)g(y),$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати функции. Уравнението (5.2) записваме във вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

което позволява да разделим променливите

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Като интегрираме последното, за общото решение получаваме формулата

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

където C е произволна константа.

Тук и навсякъде по-нататък в процедура за решаване на диференциални уравнения, под неопределен интеграл ще разбираме само една примитивна, която се избира с оглед на конкретно удобство. Това се прави по целесъобразност да не се смесват по произволен начин константите идващи от неопределения интеграл и за да имат ясен смисъл изразите, в които участват интегралните знаци.

Например да решим уравнението

(5.2) $\quad y' = 4x\sqrt{y}$.

Следвайки процедурата за решаване на уравнения с разделящи се променливи намираме

$$\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}, \quad \frac{dy}{2\sqrt{y}} = 2xdx,$$

откъдето след интегриране получаваме

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int 2xdx + C.$$

Като пресметнем интегралите получаваме, че общото решение на (5.2) е

$$\sqrt{y} = x^2 + C.$$

Този подход крие известен риск да пропуснем някои частни решения, което няма да обсъждаме.

По аналогия с формулата (5.1), най-общата форма на запис за уравнения с разделящи се променливи е

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

в която всъщност променливите са разделени още в записа на уравнението.

Нека едно уравнение може да се преобразува във вида

(5.3) $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Тогава след полагане $y = xu$, $u = u(x)$, (5.3) се свежда към уравнение с разделящи се променливи. Имаме $y' = u + xu'$. След заместване получаваме

$$xu' + u = f(u),\ x\frac{du}{dx} + u = f(u),\ \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

откъдето за общото решение на (5.3) намираме формулата

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C,$$

в която след решаване на интегралите трябва да се върнем към първоначалните променливи x и y.

Например да решим уравнението

(5.4) $$xy' = y(\ln y - \ln x).$$

Това уравнение се преобразува до хомогенно

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$$

Полагаме $y = xu$, $u = u(x)$, при което $y' = u + xu'$. Заместваме и намираме

$$u + xu' = u\ln u,\ \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},$$

следователно общото решение има вида

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

За неопределените интеграли имаме

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \ln|\ln u - 1| \text{ и } \int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$$

откъдето за общото решение получаваме

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C.$$

В последния израз можем да положим $C = \ln C_1$, $C_1 > 0$, и да преобразуваме до вида

$$|\ln u - 1| = C_1|x|,\ C_1 > 0.$$

Сега ще се освободим от модулите позволявайки константата C_1 да приема всякакви стойности. Окончателно за общото решение намираме формулата

$$\ln u - 1 = Cx,\ u = e^{Cx+1},$$

което в първоначалните променливи е

$$y = xe^{Cx+1},$$

където C е произволна константа.

3. Линейни уравнения. Диференциалното уравнение от първи ред се нарича линейно, когато има вида

(5.5) $$y' + a(x)y = b(x),$$

където коефициентите $a(x)$ и $b(x)$ се предполагат непрекъснати функции в отворения интервал Δ. Да положим $y(x)=z(x)e^{-\int a(x)dx}$ и да заместим в (5.5). Получаваме

$$z'e^{-\int a(x)dx}-ze^{-\int a(x)dx}a(x)+a(x)ze^{-\int a(x)dx}=b(x),$$

$$z'=e^{\int a(x)dx}b(x),$$

$$z=\int e^{\int a(x)dx}b(x)dx+C\,,$$

следователно всичките решения на (5.5) се дават по формулата

(5.6) $$y=e^{-\int a(x)dx}\left[\int e^{\int a(x)dx}b(x)dx+C\right].$$

Например да решим уравнението

(5.7) $y'\cos x+y\sin x=1$.

Уравнението е линейно, понеже се преобразува като

$$y'+y\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}\,.$$

Съгласно формулата (5.6), неговото общо решение е

(5.8) $$y=e^{-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}\left[\int e^{\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}\frac{1}{\cos x}dx+C\right].$$

Пресмятаме

$$\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|\,,\ e^{-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}=e^{\ln|\cos x|}=|\cos x|$$

и заместваме в (5.8), като разглеждаме два случая.

1) $\cos x>0$. Тогава имаме

$$y=\cos x\left[\int\frac{dx}{\cos^2 x}+C\right]=\cos x[\operatorname{tg}x+C]=\sin x+C\cos x\,.$$

2) $\cos x<0$. Тогава имаме

$$y=-\cos x\left[-\int\frac{dx}{\cos^2 x}+C\right]=-\cos x[-\operatorname{tg}x+C]=\sin x-C\cos x\,.$$

Понеже C е произволна константа, горните два случая могат да бъдат обединени с единствената формула

$$y=\sin x+C\cos x\,,$$

което е общото решение на (5.7). Изобщо когато целият първи множител във формулата (5.6) се получи в модул, при следващите преобразувания модулът се пренебрегва.

Уравнението на Бернули

(5.9) $y'+a(x)y=b(x)y^m$, $m\neq 0$, $m\neq 1$,

се свежда до линейно след полагането $z=y^{1-m}$,

$$z'+(1-m)a(x)z=(1-m)b(x).$$

4. Точни диференциални уравнения. В този раздел ще разглеждаме уравнения от първи ред, записани в общата форма (5.1). Диференциалното уравнение

(5.10) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

се нарича ***точно***, когато диференциалната форма $Pdx+Qdy$ се явява пълен диференциал на някоя функция $U(x,y)$. По тази причина точните уравнения се наричат още ***уравнения, произхождащи от пълен диференциал***. Тук функциите $P(x,y)$ и

$Q(x,y)$ се предполагат гладки (имат непрекъснати частни производни) в областта $D \subset \mathrm{R}^2$. Съгласно определението за пълен диференциал, уравнението (5.10) е точно, ако за някоя гладка в D функция $U(x,y)$ е изпълнено

(5.11) $$\left|\begin{aligned} U'_x &= P(x,y) \\ U'_y &= Q(x,y) \end{aligned}\right.$$

при всяко $(x,y) \in D$. Ако уравнението (5.10) е точно, то имаме $U''_{xy} = P'_y(x,y)$ и $U''_{yx} = Q'_x(x,y)$. Сега от равенството на смесените производни следва, че по необходимост е налице условието

(5.12) $Q'_x(x,y) \equiv P'_y(x,y)$,

което се нарича ***условие за точност***. Ако уравнението (5.10) е точно и е породено от пълния диференциал на $U(x,y)$, то може да се запише във вида $dU(x,y) = 0$, а неговото общо решение се дава по формулата

(5.13) $U(x,y) = C$,

където C е произволна константа. Например да разгледаме уравнението

$$(y+2x)dx + (x+2y)dy = 0.$$

Това уравнение е точно, понеже е породено от пълния диференциал на функцията $U = xy + x^2 + y^2$, следователно неговото общо решение е

$$x^2 + y^2 + xy = C.$$

Решаването на дадено точно уравнение означава да се намери функцията $U(x,y)$, която го поражда. Това може да стане например по следната схема. Разглеждаме първото от равенствата (5.11) и го интегрираме по x. Получаваме

(5.14) $U(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$.

Тук $\varphi(y)$ е константата на интегрирането, която може да зависи от другата променлива y. Диференцираме (5.14) по y и получаваме

$$U'_y = \frac{d}{dy}\left(\int P(x,y)dx\right) + \varphi'(y),$$

откъдето съгласно второто равенство в (5.12) намираме

(5.15) $\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{d}{dy}\left(\int P(x,y)dx\right)$.

От последното, след преобразуване и евентуално опростяване на изразите, чрез интегриране определяме функцията $\varphi(y)$. За да бъде възможно извършването на всичките действия е необходимо дясната страна на (5.15) да не зависи от x. Това условие е налице, понеже производната на израза по x е тъждествено нула,

$$\frac{d}{dx}\left[Q(x,y) - \frac{d}{dy}\left(\int P(x,y)dx\right)\right] = Q'_x - \frac{d^2}{dxdy}\left(\int P(x,y)dx\right) =$$

$$= Q'_x - \frac{d^2}{dydx}\left(\int P(x,y)dx\right) = Q'_x - \frac{d}{dy}P(x,y) \equiv 0$$

съгласно условието за точност (5.12).

Например да решим по тази схема уравнението

(5.16) $(y-2x)dx + (x+3y^2)dy = 0$.

Тук $P = y - 2x$ и $Q = x + 3y^2$. Имаме $Q'_x \equiv 1 \equiv P'_y$, следователно уравнението (5.16) е точно. Сега търсим функция $U(x,y)$, за която е изпълнено

$$\begin{vmatrix} U'_x = y + 2x \\ U'_y = x - 3y^2 \end{vmatrix}.$$

Интегрираме първото равенство по x и получаваме

$$U = \int (y - 2x)dx + \varphi(y) = y\int dx - 2\int xdx + \varphi(y),$$

(5.17) $U = yx - x^2 + \varphi(y)$.

След диференциране по y, като отчетем второто равенство намираме

$$x - 3y^2 = x + \varphi'(y),$$

откъдето пресмятаме

$$\varphi(y) = -\int 3y^2 dy = y^3.$$

Сега като заместим в (5.17), получаваме $U = yx - x^2 + y^3$, следователно общото решение на (5.16) се получава по формулата

$$yx - x^2 + y^3 = C,$$

където C е произволна константа.

Изложената схема за определяне на $U(x, y)$ може да стартира и от второто равенство (5.11), като в този случай отначало ще интегрираме по y, а след това за да използваме информацията от първото равенство ще диференцираме по x.

Условието за точност (5.12) $Q'_x(x, y) \equiv P'_y(x, y)$ е същевременно и условие за независимост на криволинейния интеграл от втори род от пътя. По тази причина, ако областта D, където са определени функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ е едносвързана, то функцията $U(x, y)$ може да се определи по формулата

(5.18) $U(x, y) = \int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$,

където (a, b) е една фиксиране точка от областта D, а криволинейният интеграл се взема по някоя (коя да е) частично гладка крива, която свързва точките (a, b) и (x, y). В този случай обикновено се избира начупена линия, а в случая на изпъкнали области може да се вземе отсечката, която свързва двете точки.

Например за уравнението (5.16) избираме $(a, b) = (0,0)$, а кривата на интегриране е отсечката J, свързваща началото с точката (x, y), която има следното параметрично представяне

$$J : \begin{vmatrix} x \to tx \\ y \to ty \\ 0 \le t \le 1 \end{vmatrix}$$

Тогава по формулата за пресмятане на криволинеен интеграл от втори род, за (5.18) намираме

$$U(x, y) = \int\limits_0^1 (ty + 2tx)xdt + (tx - 3t^2y^2)ydt,$$

$$U(x, y) = (yx + 2x^2)\int\limits_0^1 tdt + yx\int\limits_0^1 tdt - 3y^3\int\limits_0^1 t^2dt,$$

$$U(x, y) = (yx + 2x^2)\frac{1}{2} + yx\frac{1}{2} - 3y^3\frac{1}{3} = xy + x^2 - y^3.$$

При началната задача за уравнението (5.10) търсим интегрална крива, която минава през точката (x_0, y_0). Ако уравнението е точно, то решението се получава по формулата

$$U(x, y) = U(x_0, y_0),$$

където $U(x, y)$ е зададена чрез (5.18), което в частност оправдава записа на общото решение във вида (5.13). Като изберем $(a,b) = (x_0, y_0)$, за решението на началната задача получаваме

(5.19) $$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy = 0 .$$

Ако $P(x_0, y_0) \neq 0$ или $Q(x_0, y_0) \neq 0$, то според теоремата за неявните функции множеството, дефинирано от (5.19) представлява гладка крива през точката (x_0, y_0), която крива е търсеното решение на началната задача.

Ако $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, то въпросното множество може да не представлява крива. Например да разгледаме началната задача за търсене на интегрална крива за уравнението $xdx + ydy = 0$ през точката $(0,0)$. По формулата (5.19) за решение се получава множеството $x^2 + y^2 = 0$, което представлява единствената точка $(0,0)$.

Уравненията с разделящи се променливи

(5.20) $$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

са частен случай на точни уравнения, понеже тук $Q'_x(y) \equiv P'_y(x) \equiv 0$. От направените разсъждения следва, че решението на началната задача за (5.20) има вида

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = 0,$$

ако е налице условието $P(x_0) \neq 0$ или $Q(y_0) \neq 0$.