Лекция 6

§6. Теорема за съществуване и единственост

1. Метричното пространство $C[a,b]$. Нека $[a,b]$ е ограничен затворен интервал и да разгледаме съвкупността на непрекъснатите функции $f(x)$, определени в $[a,b]$, което пространство се означава със $C[a,b]$. Преди всичко $C[a,b]$ е линейно пространство, понеже всяка линейна комбинация на непрекъснати функции също е непрекъсната функция. Това пространство обаче не е крайномерно, тъй като могат да се намерят произволен брой линейно независими елементи, например степенните функции 1, x, x^2, ..., x^n, ... За всеки елемент на $f \in C[a,b]$ може да се въведе ***норма***

$$\|f\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)|,$$

която притежава следните свойства.

1) $\|f\| \ge 0$ и $\|f\| = 0$ единствено когато $f(x) \equiv 0$.

2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ ***(неравенство на триъгълника)***.

Първото и второто свойство са практически очевидни. За доказателство на третото ще изходим от основното неравенство за модула

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\| + \|g\|,$$

откъдето получаваме

$$\|f+g\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\| + \|g\|.$$

Всяко линейно пространство, в което има определена функция норма с посочените по-горе три свойства се нарича ***нормирано линейно пространство***.

С помощта на нормата се задава разстояние между две функции, както следва

$$(6.1) \qquad \rho(f,g) = \|f+g\|,$$

а $\rho(f,g)$ се нарича метрика, породена от нормата. Метриката има следните свойства.

1) $\rho(f,g) \ge 0$ и $\rho(f,g) = 0$ единствено когато $f = g$.

2) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$.

3) $\rho(f,g) \le \rho(f,h) + \rho(h,g)$ ***(неравенство на триъгълника)***.

Тук първите две свойства също са практически очевидни. Третото е следствие от неравенството на триъгълника за нормата,

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \|(f-h)+(h-g)\| \le \|f-h\| + \|h-g\| = \rho(f,h) + \rho(h,g).$$

Всяко множество, в което има определена функция метрика с посочените три свойства се нарича ***метрично пространство***. Метричното пространство представлява удобно ниво на абстракция, където по естествен начин се определят базовите понятие ***редица***. Редиците ще означаваме с $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто с $\{f_n\}$.

Определение 6.1. Нека X е метрично пространство с метрика ρ. Казва се, че редицата $\{f_n\}$ е сходяща и клони към границата f, когато $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$. В този случай пишем $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Определението означава, че $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува n_0 такова, че $\rho(f_n, f) < \varepsilon$, за всяко $n > n_0$. Основните свойства на редиците в метрични пространства са аналогични на тези за числовите редици. Аналогията се поражда от факта, че $\mathbb{R}$ се явява метрично пространство, където разстоянието между две числа x и y се задава от модула на тяхната разлика $\rho(x,y)=|x-y|$.

Определение 6.2. Нека X е метрично пространство с метрика ρ. Казва се, че редицата $\{f_n\}$ е фундаментална, когато $\lim\limits_{n,m\to\infty}\rho(f_n,f_m)=0$.

От определението следва, че редицата $\{f_n\}$ е фундаментална тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува n_0 такова, че $\rho(f_n,f_m)<\varepsilon$, когато $n>n_0$ и $m>n_0$. Последното е удобно да бъде формулирано по следния начин. Редицата $\{f_n\}$ е фундаментална тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува n_0 такова, че $\rho(f_{n+p},f_n)<\varepsilon$, за всяко $n>n_0$ и за всяко $p\in\mathbb{N}$.

Както при числовите редици се проверява, че всяка фундаментална редица е сходяща. За да бъде вярно обратното, метричното пространство трябва да притежава някои допълнителни свойства. В такъв случай метричното пространство се нарича ***пълно***. Примери за пълни метрични пространства са евклидовите пространства $\mathbb{R}^n$ с метрика $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sqrt{\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle}$.

Определение 6.3. Казва се, че метричното пространство X е пълно, когато всяка фундаментална редица е сходяща.

От горното определение се получава критерият за сходимост на Коши.

Твърдение 6.1. Нека X е пълно метрично пространство с метрика ρ. Редицата $\{f_n\}$ е сходяща тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери n_0 такова, че $\rho(f_{n+p},f_n)<\varepsilon$, за всяко $n>n_0$ и всяко $p\in\mathbb{N}$. ■

Оказва се, че метричното пространство $C[a,b]$, снабдено с метриката (6.1), която се нарича ***равномерна метрика***, е пълно метрично пространство.

Теорема 6.1. Метричното пространство $C[a,b]$ е пълно.

Доказателство. Нека $\{f_n\}$ е фундаментална редица от непрекъснати функции, определени в интервала $[a,b]$. Да изберем едно $\varepsilon>0$. Тогава съществува n_0 такова, че

(6.2) $$\rho(f_{n+p},f_n)=\max_{a\le x\le b}\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\text{ за } n>n_0 \text{ и } p\in\mathbb{N}.$$

Горното показва, че при всяко $x\in[a,b]$, числовата редица $\{f_n(x)\}$ към някаква граница, която ще означим с $f(x)$. За тази функция $f(x)$ ще покажем, че е непрекъсната и освен това се явява граница на редицата $\{f_n\}$ по равномерната метрика. При всяко $x\in[a,b]$, от (6.2) следва, че

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\text{ за } n>n_0 \text{ и } p\in\mathbb{N},$$

откъдето след граничен преход по $p\to\infty$ получаваме

(6.3) $$\left|f(x)-f_n(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{3},\text{ за } n>n_0.$$

Да фиксираме някакво $n>n_0$ (например $n=n_0+1$). Функцията $f_n(x)$ е непрекъсната и равномерно непрекъсната в $[a,b]$, следователно може да се намери $\delta>0$, за което

$$\left|f_n(x)-f_n(y)\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

когато $|x-y|<\delta$, $x,y\in[a,b]$. Тогава

$$\left|f(x)-f(y)\right|=\left|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(y)+f_n(y)-f(y)\right|,$$

следователно, ако $|x-y|<\delta$, $x,y\in[a,b]$, то

$$\left|f(x)-f(y)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

което показва направо равномерната непрекъснатост на граничната функция $f(x)$. Сега от неравенството (6.3) показва, че

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-f_n(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{3},\ \text{за}\ n>n_0,$$

следователно за всяко $\varepsilon>0$ успяхме да намерим n_0 такова, че $\rho(f_n,f)<\varepsilon$, когато $n>n_0$. Последното по определение означава, че $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ в смисъла на равномерната метрика. ■

Сходимостта на функции в $C[a,b]$ се нарича ***равномерна сходимост***.

Аналогично на вече известни случаи се определя δ - околност на дадена точка, $B(\delta,f)=\{g\in X:\rho(f,g)<\delta\}$, както понятията отворено и затворено множество, при което може да се докаже, че едно множество $F\subset X$ е затворено тогава и само тогава, когато съдържа границите на всичките свои сходящи редици. По този начин е вярно

Твърдение 6.2. Нека X е пълно метрично пространство с метрика ρ, а $F\subset X$ е негово затворено подмножество. Тогава F представлява също пълно метрично пространство с метрика ρ. ■

Пълнотата на метричното пространство $C[a,b]$ има особена роля при доказване на основната теорема за съществуване и единственост за решенията на началната задача за уравнение от първи ред.

2. Теорема за свиващото изображение. Тук ще разглеждаме пълно метрично пространство X с метрика ρ и изображение $\Phi:X\to X$, което е определено за всеки елемент от X и приема стойности в X. Едно такова изображение се нарича ***свиващо***, когато $\rho(\Phi(f),\Phi(g))\le\kappa\rho(f,g)$, за някоя константа κ, за която $0\le\kappa<1$. Ако за някое $\xi\in X$ е изпълнено $\Phi(\xi)=\xi$, то ξ се нарича ***неподвижна точка*** на изображението.

Теорема 6.2. Нека X е пълно метрично пространство с метрика ρ, а $\Phi:X\to X$ е свиващо изображение. Тогава Φ има при това единствена неподвижна точка ξ. Тази неподвижна точка се получава като граница на последователните приближения $f_1=\Phi(f_0)$, $f_2=\Phi(f_1)$, $f_3=\Phi(f_2)$, ..., $f_{n+1}=\Phi(f_n)$, ..., при произволно начално $f_0\in X$.

Доказателство. Да изберем някакво $f_0\in X$ и да разгледаме редицата от последователни приближения $f_{n+1}=\Phi(f_n)$, $n=0,1,2,\dots$. Ще докажем, че тя е фундаментална. За разстоянието $\rho(f_{n+1},f_n)$ имаме оценката

$$\rho(f_{n+1},f_n)=\rho(\Phi(f_n),\Phi(f_{n-1}))\le\kappa\rho(f_n,f_{n-1}),\ n=1,2,3,\dots.$$

Прилагайки последователно горното неравенство намираме

$$\rho(f_{n+1},f_n)\le\kappa\rho(f_n,f_{n-1}),$$
$$\rho(f_n,f_{n-1})\le\kappa\rho(f_{n-1},f_{n-2}),$$
$$\dots$$
$$\rho(f_2,f_1)\le\kappa\rho(f_1,f_0),$$

откъдето след почленно умножаване и съкращаване на равните множители получаваме

(6.4) $\quad\rho(f_{n+1},f_n)\le\kappa^n\rho(f_1,f_0),\ n=0,1,2,\dots.$

Ако някой от множителите, подлежащи на съкращаване $\rho(f_{n+1}, f_n) = 0$, то $f_{n+1} = f_n$, следователно f_n се явява неподвижна точка.

Сега неравенството на триъгълника ни дава

$$\rho(f_{n+p}, f_n) \le \rho(f_{n+p}, f_{n+p-1}) + \rho(f_{n+p-1}, f_{n+p-2}) + \cdots + \rho(f_{n+1}, f_n),$$

$$\rho(f_{n+p}, f_n) \le \kappa^{n+p-1}\rho(f_1, f_0) + \kappa^{n+p-2}\rho(f_1, f_0) + \cdots + \kappa^n \rho(f_1, f_0),$$

$$\rho(f_{n+p}, f_n) \le \kappa^n \rho(f_1, f_0)\left[\kappa^{p-1} + \kappa^{p-2} + \cdots + 1\right] = \kappa^n \rho(f_1, f_0)\frac{1-\kappa^p}{1-\kappa},$$

$$\rho(f_{n+p}, f_n) \le \kappa^n \frac{\rho(f_1, f_0)}{1-\kappa}, \quad p \in \mathrm{N}. \tag{6.5}$$

Дясната страна на (6.5) клони към нула, когато $n \to \infty$, следователно за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери n_0 такова, че $\rho(f_{n+p}, f_n) < \varepsilon$, когато $n > n_0$ и $p \in \mathrm{N}$. Последното означава, че редицата $\{f_n\}$ е фундаментална и следователно сходяща, понеже метричното пространство X се предполага пълно. Нека $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Тогава като направим граничен преход в равенството $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ получаваме $f = \Phi(f)$, което означава, че f е неподвижна точка за изображението.

Нека f и g са неподвижни точки за Φ. Тогава

$$\rho(f, g) = \rho(\Phi(f), \Phi(g)) \le \kappa\rho(f, g),$$

$$(1-\kappa)\rho(f, g) \le 0,$$

което е възможно само когато $\rho(f, g) = 0$. Последното разсъждение показва, че Φ може да има само една неподвижна точка. ■

Когато за дадено изображение Φ съществува множество X такова, че Φ е определен за всеки елемент на X и $\Phi : X \to X$ се казва, че X е ***инвариантно множество*** за оператора Φ. Неподвижните точки са минимални инвариантни множества. Теорема 6.2 показва, че за да намерим неподвижна точка за даден оператор е необходимо да притежава някакво инвариантно множество и да удовлетворява определение допълнителни свойства. Теорията на неподвижните точки на абстрактни оператори е самостоятелен клон в съвременната математика са най-разнообразни приложения.

Теорема 6.2 в много случаи оправдава метода на последователните приближения за търсене на решения на някакво уравнение. Този метод е особено удобен за компютърна реализация, понеже операторът за присвояване в програмирането всъщност реализира поредните итерации на метода.

3. Теорема за съществуване и единственост на началната задача. В този раздел ще установим един важен резултат, който касае решенията на началната задача

$$\left| \begin{aligned} & y' = f(x, y) \\ & y(x_0) = y_0 \end{aligned} \right. \tag{6.6}$$

където функцията $f(x, y)$ както и нейната частна производна $f'_y(x, y)$ се предполагат непрекъснати в околност на точката (x_0, y_0). Под решение на началната задача (6.6) се разбира непрекъснато диференцируема функция $y(x)$, определена в някаква достатъчно малка околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, която удовлетворява уравнението,

$$y'(x) = f(x, y(x)), \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

и началното условие, $y(x_0) = y_0$. Твърдението за съществуване има локален характер, понеже не се прави уточнение за размера на околността $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Като интегрираме уравнението $y'(t) = f(t, y(t))$ в граници от x_0 до x и приложим формулата на Нютон-Лайбниц с отчитане на началното условие $y(x_0) = y_0$, получаваме интегралното уравнение

(6.7) $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt .$$

Под решение на интегралното равнение (6.7) се разбира непрекъсната функция $y(x)$, която удовлетворява уравнението в някаква околност на точката x_0. Всяко решение на началната задача (6.6) е решение на интегралното уравнение (6.7) и обратно, ако функцията $y(x)$ е решение на (6.7), следвайки правилото за диференциране на интеграла като функция на горната си граница получаваме, че $y(x)$ е решение на диференциалното уравнение $y' = f(x, y)$, при което $y(x_0) = y_0$. По-нататък ще търсим решение на интегралното уравнение (6.7).

От направените предположения следва съществуването на затворен правоъгълник

$$\Pi = \{(x, y) : x_0 - a \le x \le x_0 + a, y_0 - b \le y \le y_0 + b\},\ a > 0 ,\ b > 0 ,$$

в който функциите $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ са непрекъснати. От свойствата на непрекъснати функции, определени в ограничени и затворени (компактни) множества следва, че съществуват константи $M > 0$ и $K > 0$, за които

$$|f(x, y)| \le M \text{ и } |f'_y(x, y)| \le K , \text{ за всяко } (x, y) \in \Pi .$$

Нека $(x, y_1) \in \Pi$ и $(x, y_2) \in \Pi$. Тогава от формулата за крайните нараствания имаме

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, \eta)(y_1 - y_2),$$

където η е точка между y_1 и y_2, следователно е изпълнено неравенството

(6.8) $$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K|y_1 - y_2| .$$

Нека X е множеството от непрекъснати функции, определено по следния начин

$$X = \{y \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] : |y(x) - y_0| \le M|x - x_0|\},$$

където

(6.9) $$\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2K}\right).$$

Условието $\delta \le a$ осигурява, че интервала $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ се съдържа в $[x_0 - a, x_0 + a]$. Условието $\delta \le \dfrac{b}{M}$ осигурява, че стойностите на функциите от конуса X не напускат интервала $[y_0 - b, y_0 + b]$, понеже $|y(x) - y_0| \le M|x - x_0| \le M\delta \le b$. Условието $\delta \le \dfrac{1}{2K}$ е свързано по-нататък с изискването операторът определен от (6.10) да бъде свиващ.

Непосредствено се проверява, че X е затворено подмножество на $C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, следователно, съгласно твърдение 6.2, X е пълно метрично пространство с равномерната метрика. Всичките елементи на X изпълняват началното условие $y(x_0) = y_0$. Да разгледаме оператора

(6.10) $$\Phi(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt ,$$

породен от дясната страна на уравнението (6.7). Очевидно решението което търсим се явява ***неподвижна точка*** за Φ. Ще докажем, че при направените предположения, Φ се явява свиващ оператор, определен за всяка функция $y \in X$ и приемащ стойности отново в X. Имаме

$$\left|\Phi(y)(x) - y_0\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\right| \le M|x - x_0|,\ x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

което показва, че образът на всяка функция от $y \in X$ се съдържа в X, $\Phi : X \to X$. От друга страна

$$\Phi(y_1) - \Phi(y_2) = \int_{x_0}^{x} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))]dt,$$

откъдето съгласно (6.8) получаваме

$$|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| \le \left|\int_{x_0}^{x} K|y_1(t) - y_2(t)|dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} K\rho(y_1, y_2)dt\right| = [K|x - x_0|]\rho(y_1, y_2),$$

което съгласно (6.9) води до неравенството

(6.11) $|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| \le \dfrac{1}{2}\rho(y_1, y_2),\ x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

От последното получаваме

$$\rho(\Phi(y_1), \Phi(y_2)) = \max_{x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta} |\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| \le \frac{1}{2}\rho(y_1, y_2),$$

което показва, че операторът $\Phi : X \to X$ е свиващ.

Сега от теорема 6.2 следва, че Φ има при това единствена неподвижна точка $y \in X$. Тази неподвижна точка представлява непрекъсната функция в интервала $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, която удовлетворява интегралното уравнение (6.7), следователно се явява решение на началната задача (6.6).

Съществуването на решение на началната задача е локално свойство. В този смисъл единствеността означава, че всеки две решения съвпадат в някаква околност на точката x_0.

Определение 6.4. Казва се, че решението $y(x)$ на началната задача (6.6) е единствено, когато всяко друго решение съвпада с $y(x)$ в някаква (достатъчно малка) околност на началната точка x_0.

Изложената по-горе схема, чрез която доказахме съществуването на решение показва, че всяко решение на началната задача (6.6), определено в интервала $(x_0 - \delta', x_0 + \delta')$, е неподвижна точка за оператора $\Phi : X \to X$, при допълнителното условие $\delta \le \delta'$, което не ограничава общността на разсъжденията, следователно намереното решение е единствено по смисъла на определение 6.3. Друго директно доказателство на единствеността се получава по следния начин. Нека y_1 и y_2 са две решения на (6.6), определени в интервала $[x_0 - \delta', x_0 + \delta']$, където $0 < \delta' \le \delta$. Тогава както при неравенството (6.11) намираме

$$|y_1(x) - y_2(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} K|y_1(t) - y_2(t)|dt\right| \le \frac{1}{2}\max_{x_0 - \delta' \le x \le x_0 + \delta'} |y_1(x) - y_2(x)|,\ x \in [x_0 - \delta', x_0 + \delta'],$$

което води до неравенството

$$\max_{x_0 - \delta' \le x \le x_0 + \delta'} |y_1(x) - y_2(x)| \le \frac{1}{2}\max_{x_0 - \delta' \le x \le x_0 + \delta'} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

Последното е възможно единствено когато $y_1(x) \equiv y_2(x)$ в интервала $[x_0 - \delta', x_0 + \delta']$.

По този начин доказахме

Теорема 6.3. Нека функцията $f(x, y)$ и нейната частна производна $f'_y(x, y)$ са непрекъснати в някаква околност на точката (x_0, y_0), която съдържа правоъгълника

$$\Pi = \{(x, y): x_0 - a \le x \le x_0 + a, y_0 - b \le y \le y_0 + b\},\ a > 0,\ b > 0.$$

Тогава началната задача

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

има при това единствено решение, което е определено поне в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, където

$$\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2K}\right),\ M = \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)| \text{ и } K = \max_{(x,y)\in\Pi} |f'_y(x, y)|. \ \blacksquare$$

Без уточняване интервала на съществуване, теорема 6.3 може да бъде изказана по следния съкратен начин. Нека функцията $f(x, y)$ и нейната частна производна $f'_y(x, y)$ са непрекъснати в околност на точката (x_0, y_0). Тогава началната задача има при това единствено решение, определено в някаква достатъчно малка околност на началната точка x_0.

Условието за непрекъснатост на производната $f'_y(x, y)$ не е необходимо за съществуването на решение. Съгласно една знаменита ***теорема на Пеано***, началната задача винаги има решение стига функцията $f(x, y)$ да бъде непрекъсната в околност на точката (x_0, y_0). Това решение обаче може да не бъде единствено. Например да разгледаме началната задача

$$\left| \begin{array}{l} y' = 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \end{array} \right. \qquad (6.12)$$

Едно решение на (6.12) е функцията $y_1(x) \equiv 0$. Друго решение $y_2(x) = x^3$ можем да получим, ако решим уравнението $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ по правилото за решаване на уравнения с разделящи се променливи. Тези две решения обаче се различават във всяка околност на началната точка $x_0 = 0$, следователно в този случай нямаме единственост. Отсъствието на единственост при решенията на началната задача нарушава интуитивната представа за смисъла на решението и се явява нежелан ефект в приложенията.

4. Сведения за системи диференциални уравнения. В повечето случаи от практическо значение се разглеждат системи диференциални уравнения

$$\left| \begin{array}{l} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array} \right. \qquad (6.13)$$

където функциите в десните страни се предполагат непрекъснати. Когато за търсените функции y_1, y_2, ..., y_n се поставят начални условия

$$
(6.14)\quad \left|\begin{array}{l} y_1(x_0) = y_0^1 \\ y_2(x_0) = y_0^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x_0) = y_0^n \end{array}\right.
$$

се получава начална задача. Под решение на началната задача (6.13)-(6.14) се разбира система от непрекъснати функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, които удовлетворяват уравненията (6.13) в някаква околност на точката x_0 и удовлетворяват началните условия (6.14). Тук е валидна теорема за съществуване и единственост, която има аналогичен характер с теорема 6.3.

Теорема 6.4. Нека функциите $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = 1,2,\ldots,n$, както и всичките частни производни

$$
\frac{\partial f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_j}, \quad k = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,n,
$$

са непрекъснати в околност на точката $(x_0, y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^n)$. Тогава началната задача (6.13)-(6.14) има при това единствено решение, определено в някаква достатъчно малка околност на началната точка x_0. ■